ZORRO

Profesor
Edson Curahua

PITAGORAS
ACADEMIA

GEOMETRÍA

GRUPO PITÁGORAS

CLASE 11: GEOMETRÍA DEL ESPACIO

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

DETERMINACIÓN DEL PLANO

POSICIONES RELATIVAS

ÁNGULO ENTRE RECTAS CRUZADAS

RECTA PERPENDICULAR AL PLANO

TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS CRUZADAS

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

NOCIONES Y POSTULADOS FUNDAMENTALES

Recordemos que los entes geométricos fundamentales son el punto, la recta y el plano. Tanto la recta como el plano son conjuntos de puntos y el conjunto de todos los puntos es el *espacio geométrico*.

PLANO: La superficie plana o simplemente plano es aquella superficie tal que contiene íntegramente a la recta determinada por dos puntos cualesquiera de dicha superficie. La superficie de las aguas tranquilas, la de los espejos, la de las pizarras bien pulimentadas, etc; nos dan una idea aproximada de una porción de superficie plana. Y si la imaginamos extendida indefinidamente en todas direcciones, tenemos la idea de *plano geométrico*.

De la noción dada se deduce que el plano es ilimitado, pero en los dibujos se representa por medio de figuras limitadas, como regiones poligonales, circulares etc. Frecuentemente se utilizan regiones paralelográmicas.

NOTACIÓN

Los planos se designan con una sola letra mayúscula y cuando sea necesario, para evitar confusiones, con dos o más.

Plano H o ▱H

OBSERVACIONES

Los puntos de un conjunto están alineados o son colineales, si hay una recta que los contiene a todos.

Los puntos de un conjunto son coplanarios, si hay un plano que los contiene a todos.

POSTULADO DE SEPARACIÓN DE PUNTOS DE UN PLANO

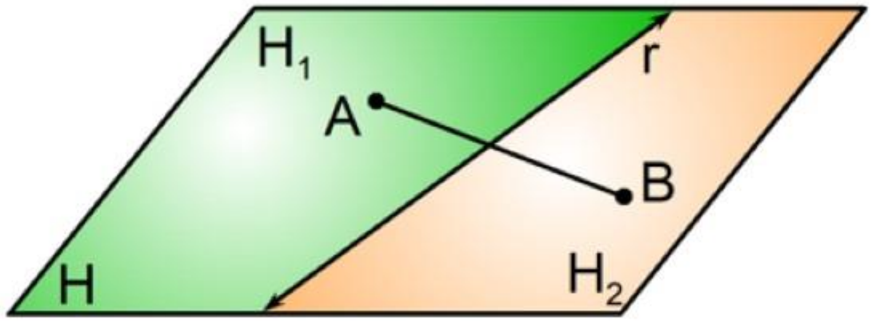
Una recta $\overleftrightarrow{r}$ de un plano H separa este plano en dos conjuntos de puntos H_1 y H_2 tales que.

a) $H_1 \cap H_2 = \phi$

b) H_1 y H_2 son convexos

c) Si $A \in H_1$ y $B \in H_2$

$$\Rightarrow \overline{AB} \text{ interseca a } \overleftrightarrow{r}$$



Cada uno de los conjuntos H_1 y H_2 se denominan semiplano.

La recta $\overleftrightarrow{r}$ se llama arista u origen de cada uno de los semiplanos.

H_1 y H_2 se llaman semiplanos opuestos.

POSTULADO DE SEPARACIÓN DE PUNTOS DEL ESPACIO

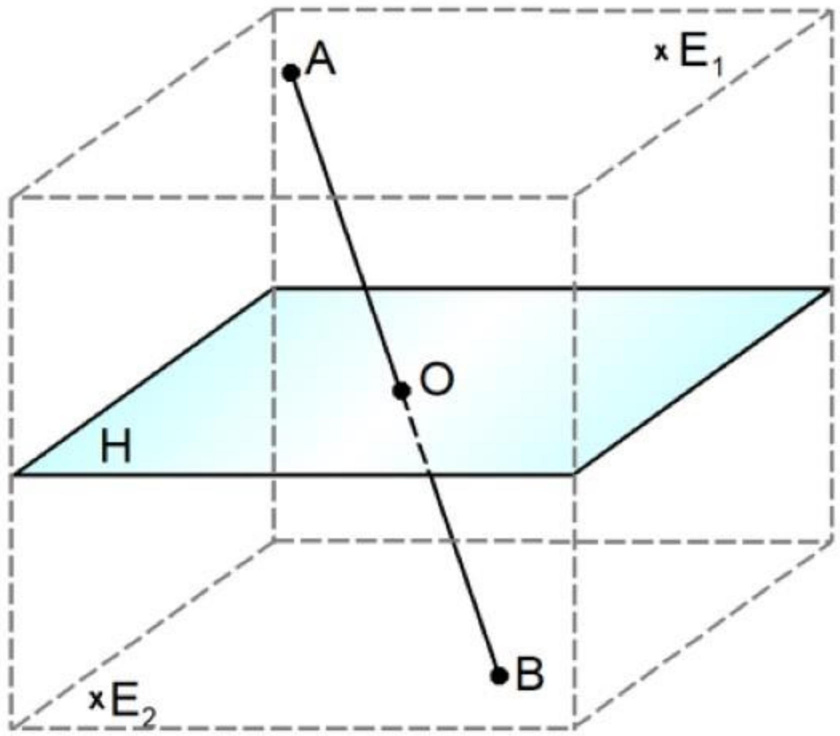
Un plano H del espacio tridimensional separa a este espacio en dos conjuntos de puntos E_1 y E_2 tales que:

a) $E_1 \cap E_2 = \phi$

b) E_1 y E_2 son convexos

c) Si $A \in E_1$ y $B \in E_2$

$$\Rightarrow \overline{AB} \text{ interseca al plano H}$$



Cada uno de los conjuntos E_1 y E_2 se llama semiespacio.

El plano H se denomina *cara* de cada uno de los semiespacios.

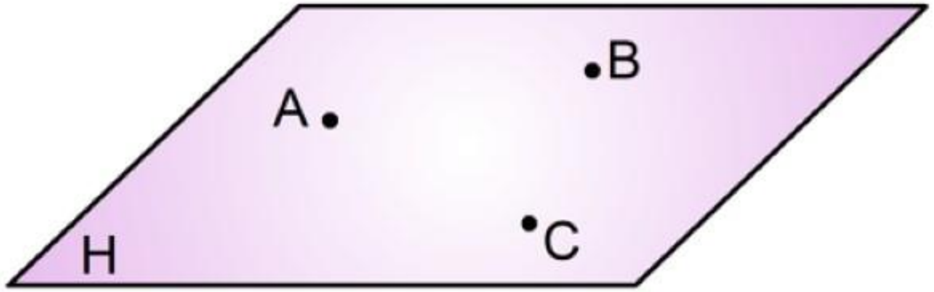
DETERMINACIÓN DEL PLANO

Decimos que ciertos puntos o rectas determinan un plano si ellos fijan la posición de este plano y, además, le pertenecen.

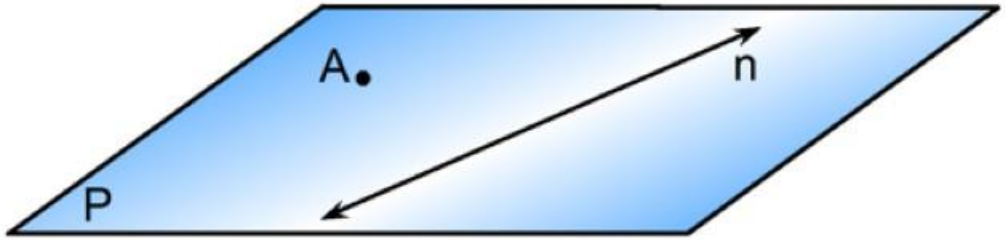
Un plano queda determinado en cada uno de los siguientes casos:

1) Tres puntos no colineales determinan un único plano al cual pertenecen.

Si A, B y C son puntos no colineales, entonces: A, B y C determinan el plano H.

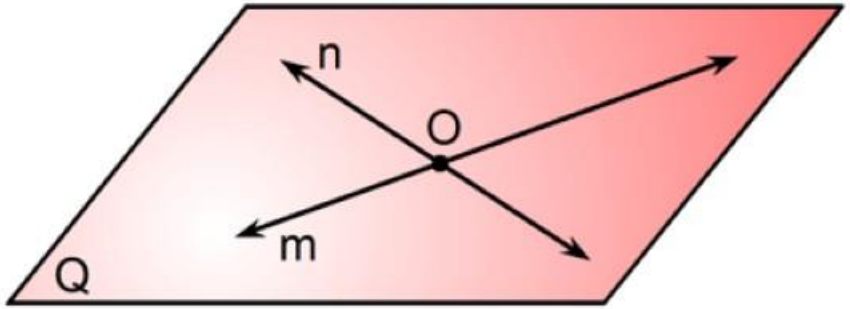


2) Una recta y un punto exterior a ella determinan un único plano, al cual pertenecen.



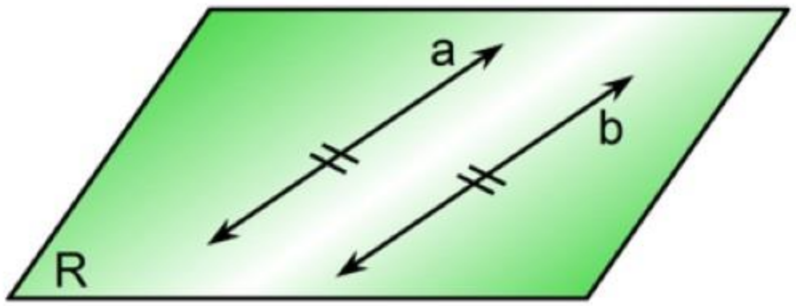
A y $\overleftrightarrow{n}$ determinan el plano P.

3) Dos rectas que se intersecan determinan un único plano, al cual pertenecen.



$\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ determinan el plano Q.

4) Dos rectas paralelas determinan un único plano, al cual pertenecen.



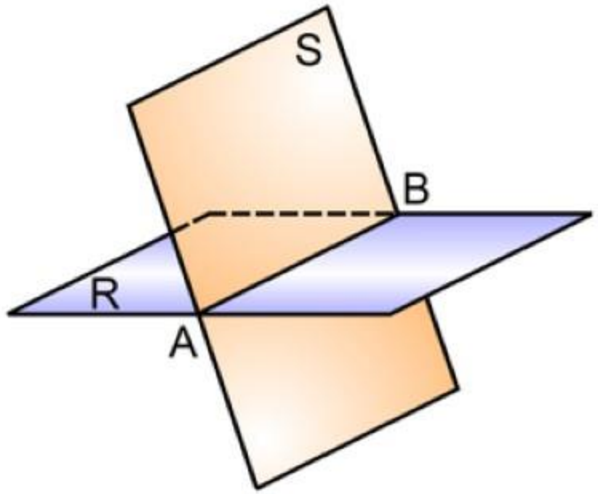
Si $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b}$, entonces ellas determinan el plano R.

POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Dados dos planos del espacio:

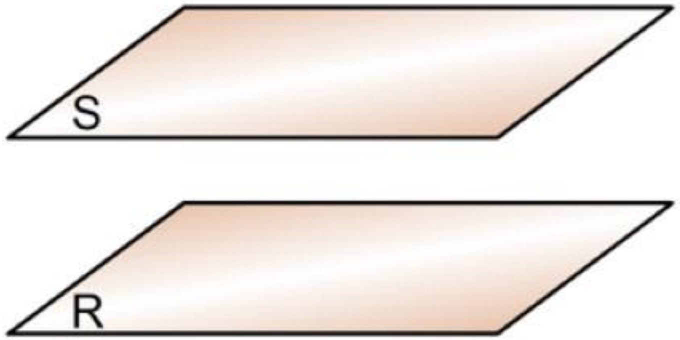
a) Son secantes, si tienen una recta en común, es decir, la intersección de dos planos secantes es una recta.



$\square R$ y $\square S$: Secantes

$$\square R \cap \square S = \overleftrightarrow{AB}$$

b) Son paralelos, si no se intersecan.



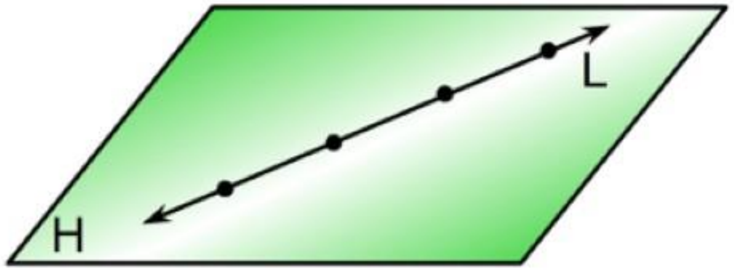
Si: $\text{▱}R \parallel \text{▱}S$

$\Rightarrow \text{▱}R \cap \text{▱}S = \phi$

POSICIONES RELATIVAS ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

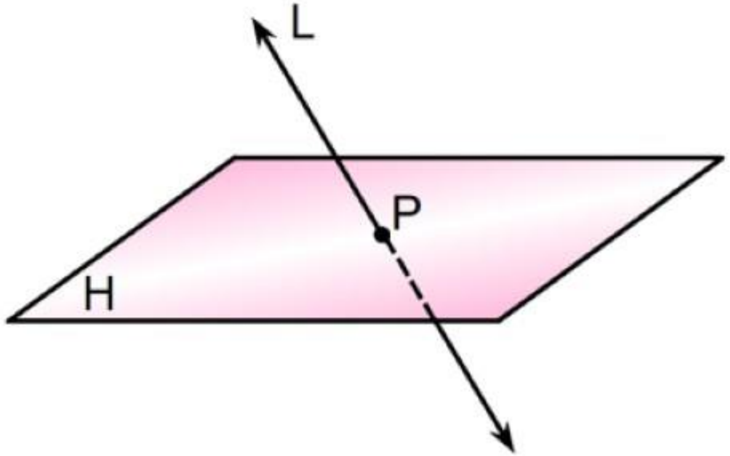
Dadas una recta y un plano:

a) La recta está contenida en el plano si tiene todos sus puntos comunes con él.



$\overleftrightarrow{L} \subset \text{▱}H$

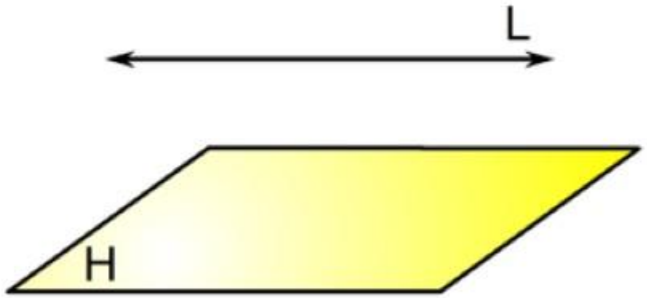
b) Son secantes si se intersecan en un punto.



Si $\overleftrightarrow{L} \cap \square H = \{P\}$

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{L}$ y $\square H$ son secantes

c) Son paralelos si no se intersecan.



Si $\overleftrightarrow{L} \parallel \square H$

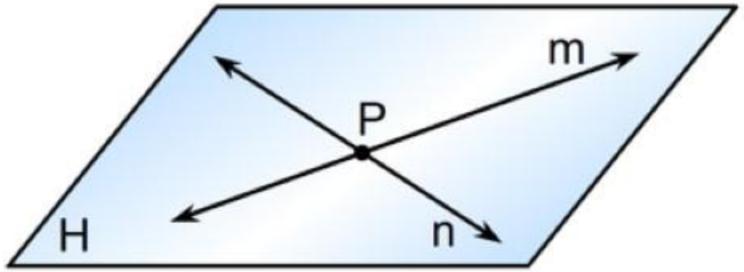
$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{L} \cap \square H = \phi$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO

Dos rectas en el espacio pueden pertenecer a un mismo plano (rectas coplanarias) o no pertenecer al mismo plano.

Si las rectas son coplanarias:

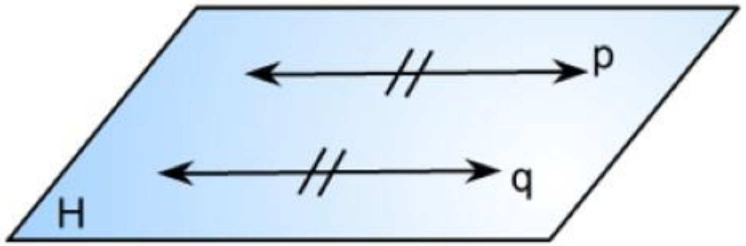
a) Son secantes, si su intersección es un punto.



Si $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ son secantes

$$\Rightarrow \quad \overleftrightarrow{m} \cap \overleftrightarrow{n} = \{P\}$$

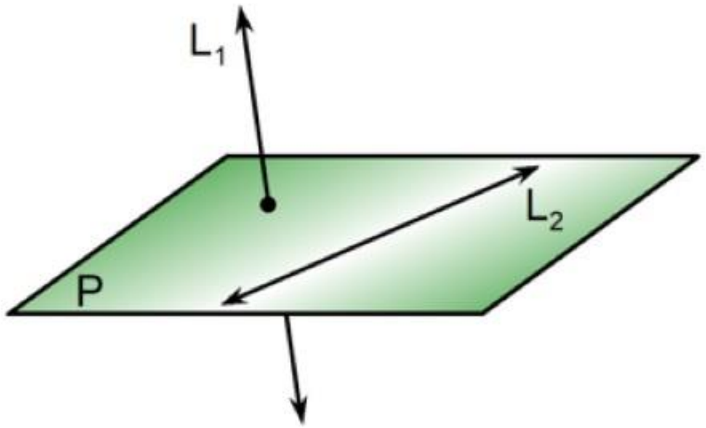
b) Son paralelas, si no se intersecan.



$$\overleftrightarrow{p} \parallel \overleftrightarrow{q} \quad \Rightarrow \quad \overleftrightarrow{p} \cap \overleftrightarrow{q} = \phi$$

Si las rectas no son coplanarias, entonces no se intersecan.

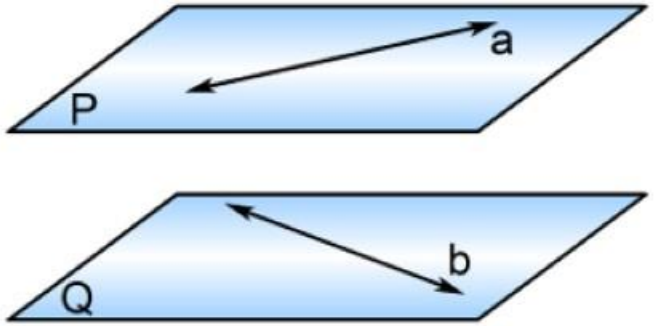
En este caso se denominan rectas alabeadas o cruzadas.



Así en la figura $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son rectas alabeadas

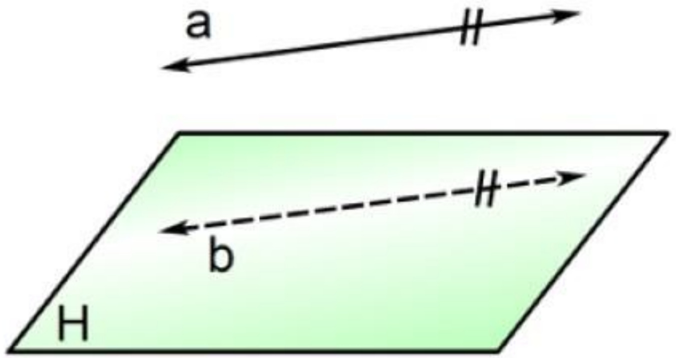
NOTA:

Dadas dos rectas cruzadas, siempre es posible trazar dos planos paralelos que las contengan.



TEOREMAS SOBRE PARALELISMO DE RECTAS Y PLANOS

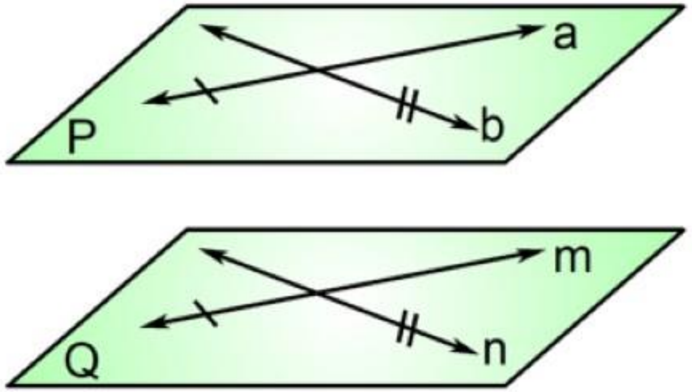
01. Toda recta no contenida en un plano y que es paralela a una recta de este plano, es paralela al plano.



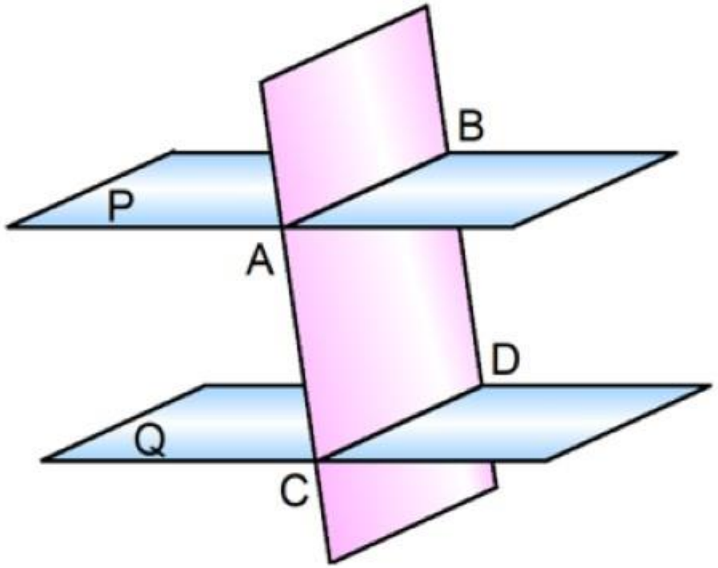
$$\text{Si: } \begin{array}{l} \overleftrightarrow{a} \not\subset \square H \\ \overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b} \\ \overleftrightarrow{b} \subset \square H \end{array} \quad \Rightarrow \quad \overleftrightarrow{a} \parallel \square H$$

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

02. Si dos rectas secantes de un plano son paralelas a otras dos rectas secantes de otro plano, entonces ambos planos son paralelos.



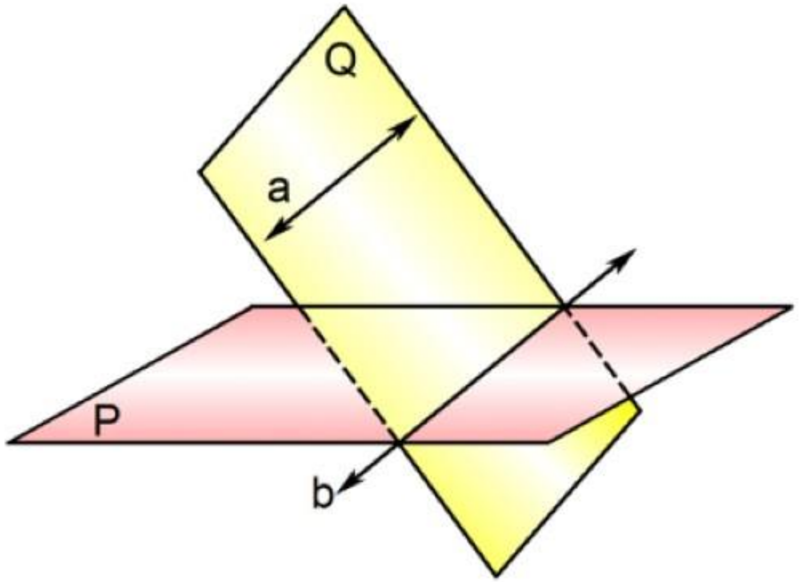
03. Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercer plano, son paralelas.



Si: $\square P \parallel \square Q \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

04. Si una recta es paralela a un plano, todo plano que pase por la recta y que corte al primero, le intersecará según una recta paralela a la recta dada.



Si: $\overleftrightarrow{a} \parallel \square P$, $\overleftrightarrow{a} \subset \square Q$, $\square P \cap \square Q = \overleftrightarrow{b}$ $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b}$

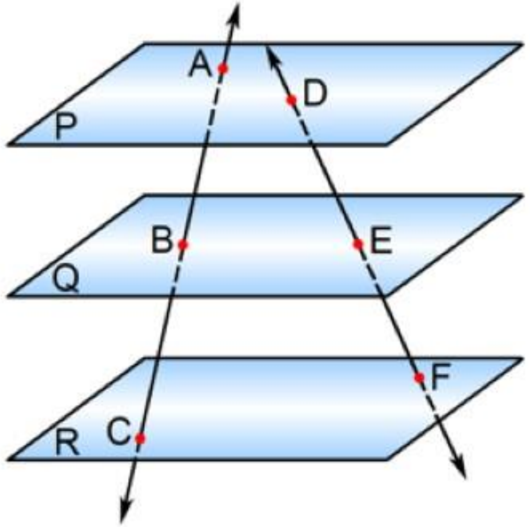
COROLARIOS

a) Dos planos paralelos determinan sobre dos rectas paralelas segmentos congruentes.

b) Toda recta paralela a dos planos secantes, es paralela a su intersección.

TEOREMA DE THALES

Tres o más planos paralelos determinan en dos rectas secantes a ellos, segmentos proporcionales.

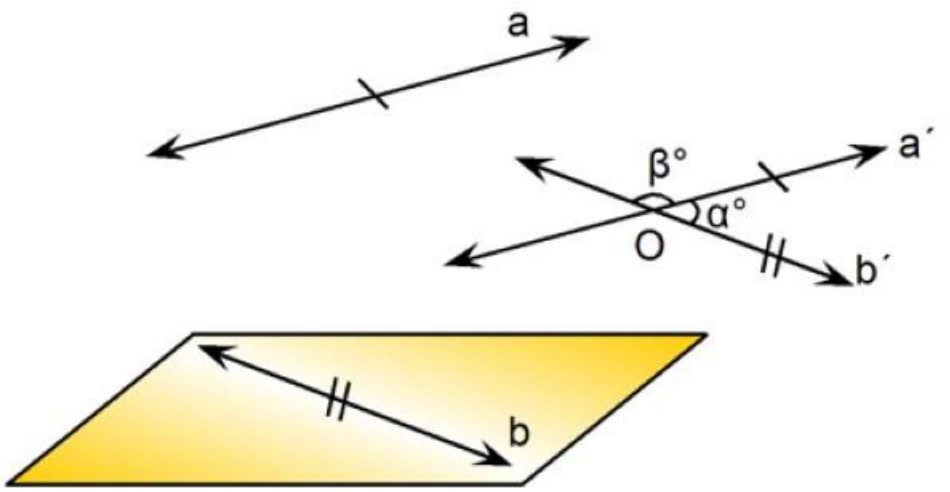


Si: $\square P \parallel \square Q \parallel \square R$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}}$$

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS CRUZADAS

Es el ángulo determinado por dos rectas respectivamente paralelas a las rectas dadas trazadas por un punto cualquiera del espacio.

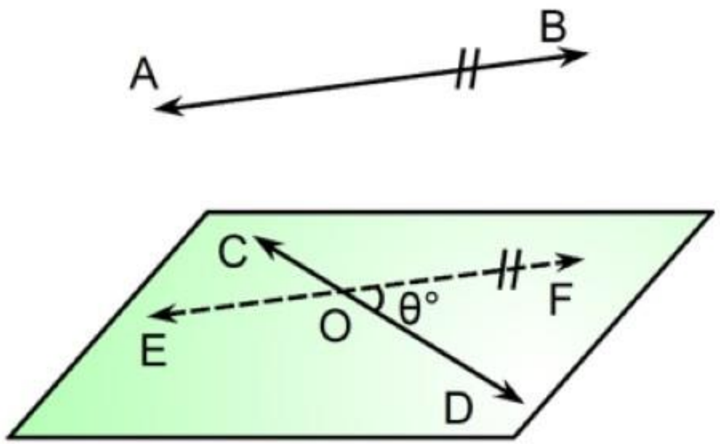


Así, dadas las rectas cuzadas $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$, si $\overleftrightarrow{a'} \parallel \overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b'} \parallel \overleftrightarrow{b}$, entonces α (o β) es la medida del ángulo entre las rectas que se cruzan $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

OBSERVACIÓN

El ángulo entre dos rectas cruzadas también se obtiene trazando la paralela a una de las rectas dadas por un punto cualquiera de la otra.

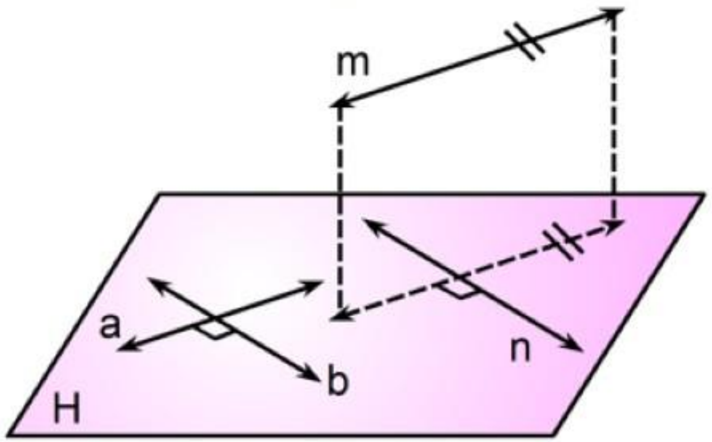


Si $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, entonces θ es la medida del ángulo entre las rectas que se cruzan $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.

RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas que se intersecan o se cruzan, serán perpendiculares entre sí, si el ángulo que forman entre ellas es recto.

Así en la figura: $\overleftrightarrow{a} \perp \overleftrightarrow{b}$ y $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{n}$



OBSERVACIÓN:

En algunos cursos se usa el término ortogonalidad como sinónimo de perpendicularidad.

Ejemplo

Indicar la proposición correcta:

A) Dos rectas perpendiculares a una tercera son necesariamente paralelas.

B) La intersección de 3 planos es necesariamente una recta.

C) Dos planos que forman con un tercero ángulos congruentes son paralelos.

D) Las intersecciones de 2 planos paralelos con un tercero son paralelas.

E) Todas las anteriores son falsas.

Ejemplo

Indicar verdadero o falso (V o F):

( ) Tres puntos determinan siempre un plano.

( ) Dos rectas determinan siempre un plano.

( ) Si una recta es paralela a un plano, será paralela a todas las rectas contenidas en el plano.

( ) Si una recta es perpendicular a un plano, será perpendicular a todas las rectas contenidas en el plano.

A) VVVV B) VFVF C) FVFV

D) FFFF E) FFFV

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Ejemplo

Indique el valor de verdad en las siguientes proposiciones:

I. Dos rectas que se encuentran en planos paralelos son también paralelas.

II. Si una recta es paralela a uno de dos planos secantes, entonces es secante al otro plano.

III. Si una recta y un plano son conjuntos disjuntos entonces la recta es paralela al plano.

IV. Si la suma de las distancias de un punto a dos planos paralelos es **d**, entonces **d** es la distancia entre los planos.

A) FFFV B) VVVV C) VFFV
D) FFVF E) FFFF

Ejemplo

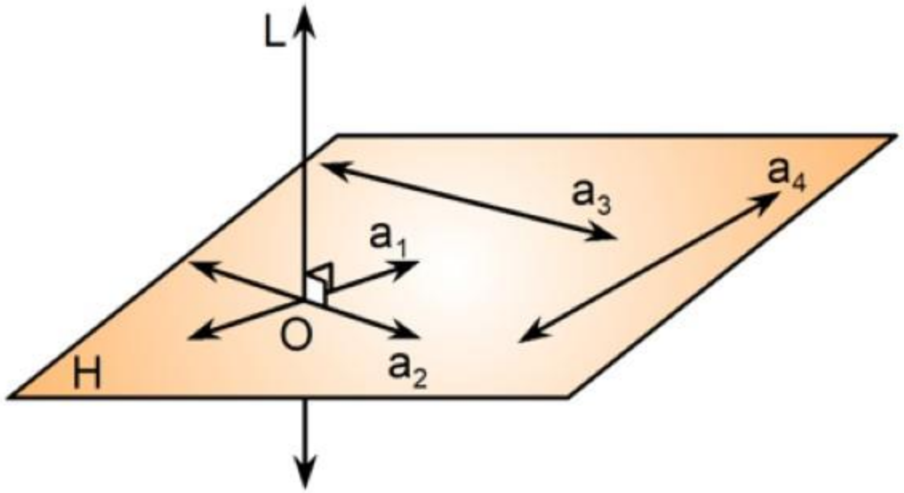
Dados los segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que no se encuentran en un plano siendo $\overline{MN}$ el segmento que une sus puntos medios AD=21 y BC=30, calcular el máximo valor entero de MN.

A) 25 B) 26 C) 27
D) 28 E) 30

RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO

Una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a todas las rectas contenidas en el plano. El plano se dice, a su vez, perpendicular a la recta. El punto de intersección de la recta perpendicular y el plano, se denomina pie de la perpendicular.

Así en la figura el punto O es el pie de la recta perpendicular L.



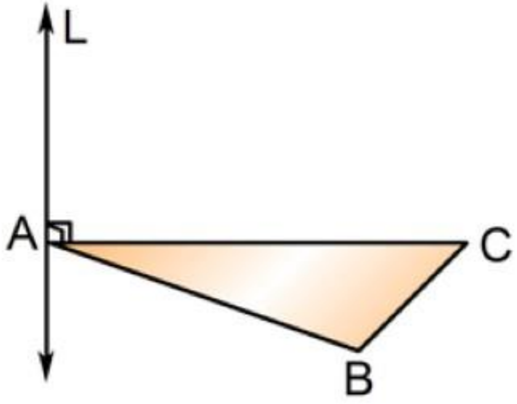
Si : $\overleftrightarrow{L} \perp \square H$ y $\overleftrightarrow{a_1}, \overleftrightarrow{a_2}, \overleftrightarrow{a_3} \ldots \subset \square H$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{a_1}, \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{a_2}, \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{a_3} \ldots$$

NOTAS:

01. Si la recta interseca al plano sin serle perpendicular se llama *oblicua* al plano.

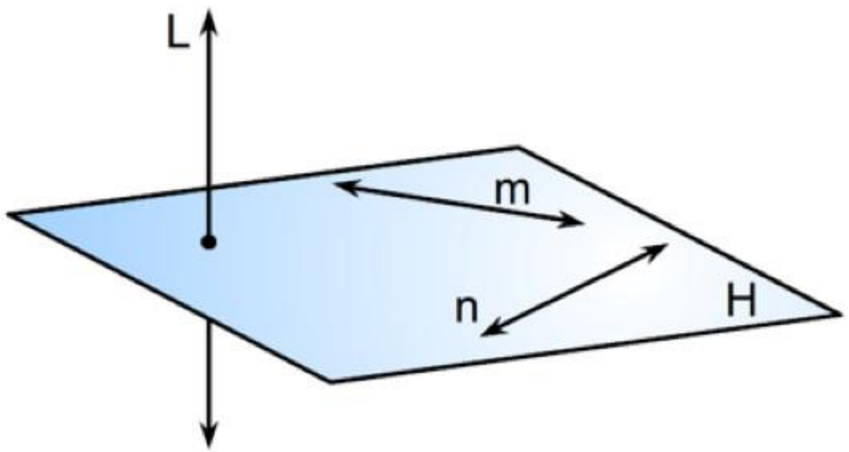
02. En la figura $\overleftrightarrow{L} \perp \Delta ABC$, luego:



$$\boxed{\overleftrightarrow{L} \perp \overline{BC}}$$

TEOREMA

Para que una recta sea perpendicular a un plano será condición necesaria y suficiente que dicha recta sea perpendicular a dos rectas secantes del plano.

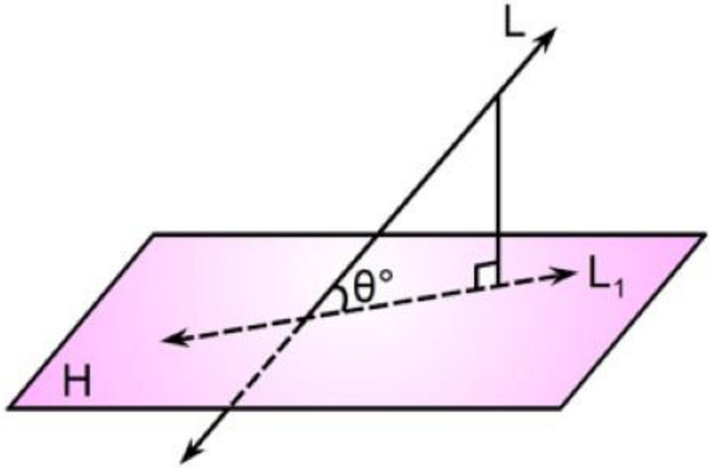


Sean m y n rectas no paralelas del plano H, si $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{n}$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \perp \square H$$

ÁNGULO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

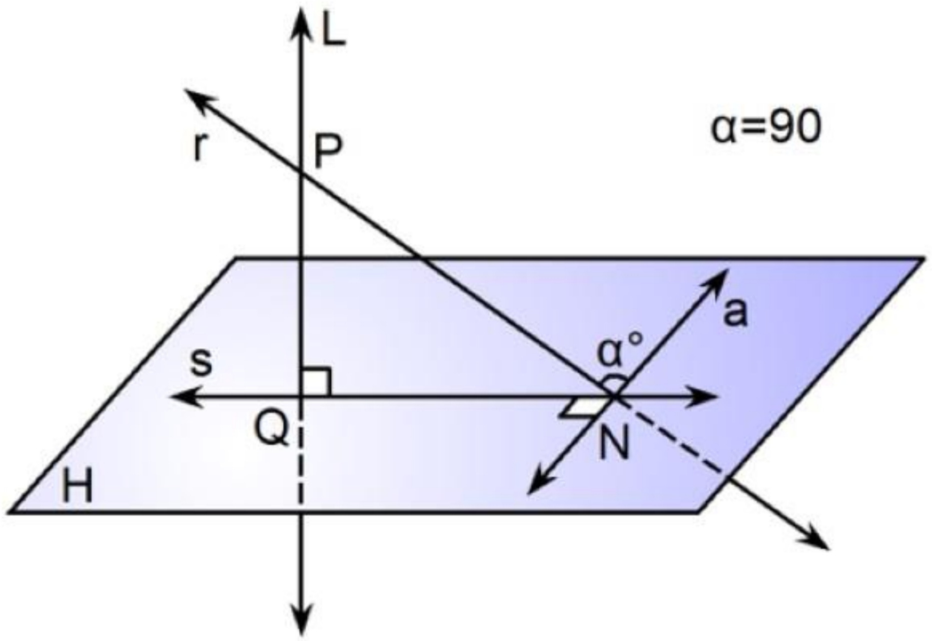
El ángulo entre una recta y un plano, es el ángulo que determina la recta con su proyección en dicho plano.



En la figura $\overleftrightarrow{L_1}$ es la proyección de $\overleftrightarrow{L}$ sobre el plano H, luego θ es la medida del ángulo entre la recta $\overleftrightarrow{L}$ y el plano H.

TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES

Si por el pie de una recta perpendicular a un plano se traza otra recta perpendicular a una de las rectas contenida en dicho plano, entonces toda recta trazada por el pie de esta última recta y un punto cualquiera de la recta perpendicular al plano será perpendicular a la recta contenida en dicho plano.



Sea $\overleftrightarrow{L} \perp \square H$

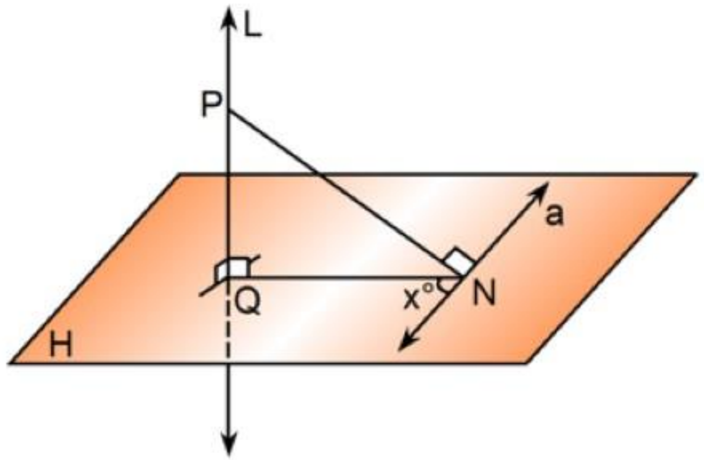
$\overleftrightarrow{a} \subset \square H$

y $\overleftrightarrow{s} \perp \overleftrightarrow{a}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{r} \perp \overleftrightarrow{a}$

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

NOTAS:



Si: $\overleftrightarrow{L} \perp \square H$

$\overleftrightarrow{a} \subset \square H$

y $\overline{PN} \perp \overleftrightarrow{a}$

$\Rightarrow \quad x = 90$

NOTAS:

01. Por un punto P pasa un plano perpendicular a una recta y solamente uno.

02. Si tenemos dos planos paralelos y una recta es perpendicular a uno de ellos, entonces dicha recta también es perpendicular al otro.

03. Por un punto P de un plano pasa una recta perpendicular al plano y solamente una.

04. Por un punto P exterior a un plano, pasa una recta perpendicular al plano y solamente una.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Ejemplo

¿Cuántas perpendiculares a una recta se pueden trazar en el espacio, desde un punto exterior a ella?

A) 1 B) Ninguna C) 2
D) 3 E) Infinitas

Ejemplo

Se tienen los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cruzados y perpendiculares tal que AB=12 y CD=16. Calcular la distancia entre los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

A) $5\sqrt{5}$ B) 12 C) 15
D) 10 E) 13

Ejemplo

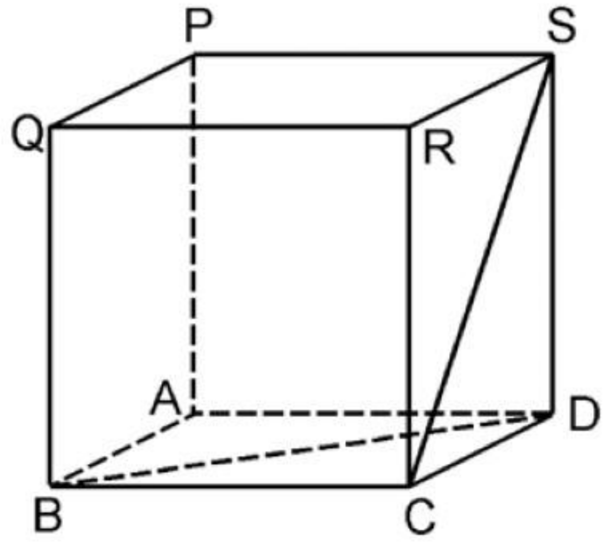
Dos puntos A y B situados a uno y otro lado de un plano "x" distan de dicho plano 6 y 9, la proyección de $\overline{AB}$ sobre el plano mide 30. Calcular AB.

A) $15\sqrt{5}$ B) 15 C) $12\sqrt{3}$

D) $12\sqrt{5}$ E) 12

Ejemplo

La figura representa un cubo de arista a cm. Calcule el ángulo que forman las rectas CS y BD.



A) 30 B) 45 C) 60

D) 75 E) 90 (UNI 2014-2)

Ejemplo

Por el vértice B del triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza $\overline{\mathrm{BP}}$ perpendicular al plano de dicho triángulo. Si PB=6 y AC=16, calcular la distancia de P al punto medio de $\overline{\mathrm{AC}}$.

A) $8\sqrt{2}$ B) $5\sqrt{2}$ C) 12

D) 10 E) 15

Ejemplo

Las proyecciones de un segmento sobre un plano y sobre una recta perpendicular al plano miden 12 y 5 respectivamente. Calcular la medida del segmento.

A) 12 B) 17 C) 14

D) 13 E) 15

Ejemplo

Por el baricentro G de un triángulo rectángulo recto en B se traza $\overline{\mathrm{GH}}$ perpendicular al plano que contiene al triángulo. Si 3(BH)=2(AC), calcular el ángulo entre $\overline{\mathrm{BH}}$ y el plano del triángulo.

A) 60 B) 53 C) 75

D) 45 E) 36

Ejemplo

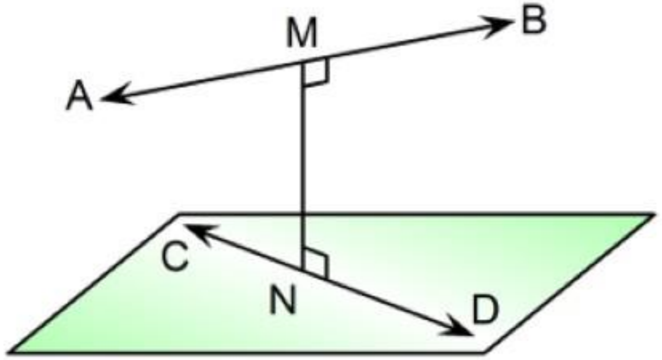
Por el extremo A del diámetro $\overline{\mathrm{AB}}$ de una circunferencia se levanta una perpendicular al plano del círculo, sobre esta perpendicular se toma un punto M y se une B con un punto C de la circunferencia. Calcular MC, si MB=26 y BC=14

A) $2\sqrt{15}$ B) $4\sqrt{5}$ C) $4\sqrt{30}$

D) 18 E) 20

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS CRUZADAS

La distancia entre dos rectas cruzadas es la longitud del segmento de recta perpendicular a dichas rectas cruzadas y limitado por ellas.



En el gráfico:

$$\overline{MN} \perp \overleftrightarrow{AB} \text{ y } \overline{MN} \perp \overleftrightarrow{CD}$$

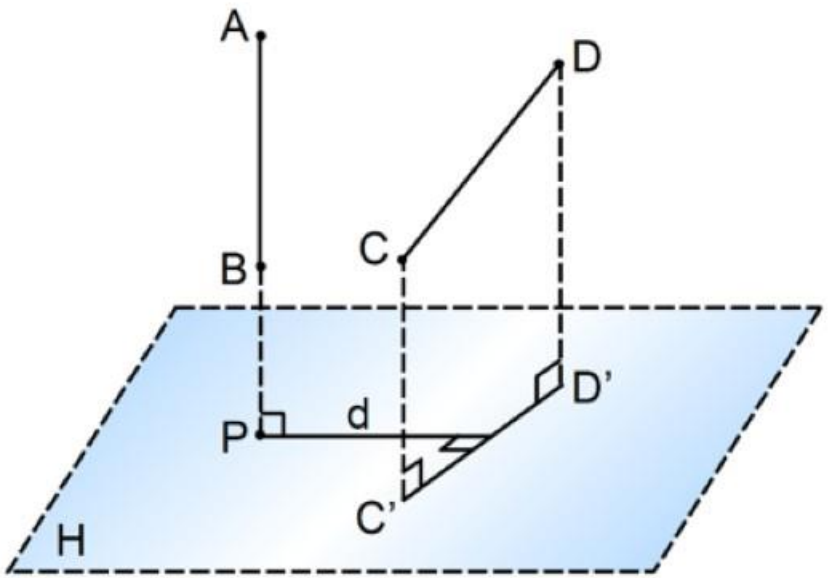
$$\text{M en } \overleftrightarrow{AB} \text{ y N en } \overleftrightarrow{CD}$$

Luego: MN es la distancia entre las rectas cruzadas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.

MÉTODOS PARA CALCULAR LA DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS CRUZADAS

PRIMER MÉTODO

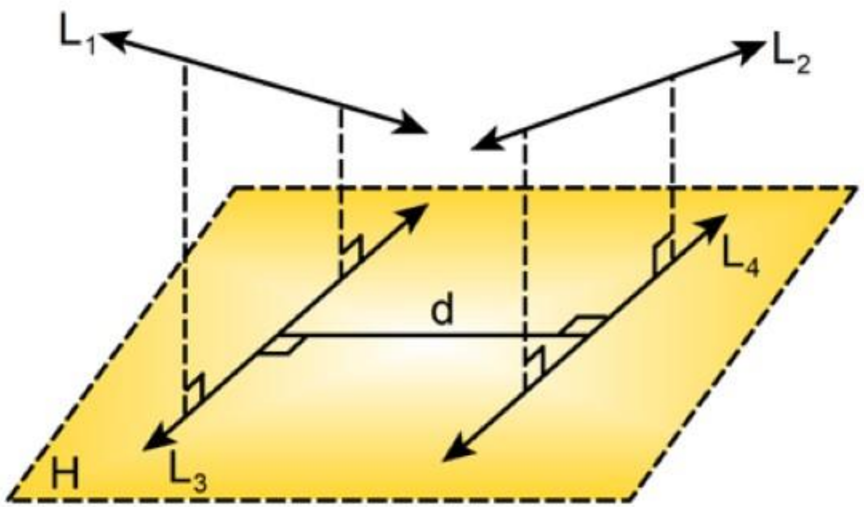
Se traza un plano perpendicular a una de las rectas y luego se proyectan ambas rectas en dicho plano. La distancia entre dichas proyecciones será la distancia entre las rectas alabeadas.



Al proyectar ambas rectas en el plano H, ($\square H \perp \overleftrightarrow{AB}$), vemos que sus proyecciones son el punto P y $\overleftrightarrow{C'D'}$. Entonces la distancia d de P a $\overleftrightarrow{C'D'}$, será la distancia entre las rectas cruzadas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.

SEGUNDO MÉTODO

Se traza un plano tal que las proyecciones de las rectas sobre éste sean paralelas, luego la distancia "d" entre dichas proyecciones paralelas será la distancia entre las rectas cruzadas.



Sean $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ dos rectas cruzadas; $\overleftrightarrow{L_3}$ y $\overleftrightarrow{L_4}$ sus proyecciones sobre el plano H, tal que $\overleftrightarrow{L_3} \parallel \overleftrightarrow{L_4}$ entonces la distancia (d) entre $\overleftrightarrow{L_3}$ y $\overleftrightarrow{L_4}$ es la distancia buscada.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Ejemplo

Se tiene las rectas alabeadas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, siendo AC la distancia entre ellas, tal que AC=4 y BD=6. Calcular la distancia entre los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

A) $\sqrt{17}$ B) $\sqrt{19}$ C) $\sqrt{21}$
D) $\sqrt{23}$ E) 5

Ejemplo

Sean los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ ubicados en planos diferentes, que forman un ángulo que mide 30°. Si $\overline{AC} \perp \overline{AB}$, $\overline{AC} \perp \overline{CD}$, AC=2 m, AB=4 m y CD=$\sqrt{3}$ m, entonces la longitud (en m) de $\overline{BD}$ es:

A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{11}$ C) $\sqrt{12}$
D) $\sqrt{13}$ E) $\sqrt{14}$ (UNI 2020-1)

Ejemplo

Se tienen los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que se cruzan con un ángulo de 60°, $\overline{AC}$ es la distancia entre ambos segmentos tal que AC=5, AB=4 y CD=6. Calcular BD.

A) $3\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{14}$ C) $2\sqrt{15}$
D) $\sqrt{53}$ E) $3\sqrt{3}$

Ejemplo

Por el vértice B de un triángulo equilátero ABC se traza la perpendicular $\overline{BP}$ al plano que lo contiene. Si AB=8 u y BP=6 u y M es el punto medio de $\overline{AC}$, entonces la distancia entre $\overline{MP}$ y $\overline{BC}$ (en u) es:

A) 1 B) 2 C) 3
D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

01. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Dos rectas paralelas a un plano son coplanares.

II. Si dos rectas determinan ángulos congruentes con un plano, entonces dichas rectas son secantes.

III. Toda recta exterior a un plano es paralela a dicho plano.

A) FVV B) VFF C) FVF
D) FFF E) FFV

Resolución:

Rpta. E

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

02. El radio de una circunferencia de centro O mide 10 cm y la cuerda $\overline{PQ}$ trazada en dicha circunferencia mide 12 cm. Si por O se traza $\overline{OA}$ perpendicular al plano de la circunferencia y OA=15 cm, entonces la distancia (en cm) del punto A a la cuerda $\overline{PQ}$ es:

A) 16 B) 17 C) 18

D) 20 E) 21

Resolución:

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

03. $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos segmentos cruzados y congruentes. Si la longitud del segmento que tiene por extremos los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, es la mitad de la longitud de $\overline{AB}$, calcular la medida del ángulo que determinan dichos segmentos cruzados.

A) 30 B) 45 C) 60

D) 72 E) 90

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

04. Si las proyecciones ortogonales de un segmento $\overline{AB}$ sobre el plano P y sobre la recta L perpendicular al plano P, miden 15 u y 8 u respectivamente, entonces la longitud (en u) de $\overline{AB}$ exterior al plano P es:

A) 14 B) 15 C) 16

D) 17 E) 18

Resolución:

Rpta. D

05. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Dos rectas que no se intersecan son paralelas.

II. Una recta que es perpendicular a infinitas rectas de un plano P es perpendicular al plano P.

III. Si la recta L está contenida en un plano P_1 y es paralela a otro plano P_2, entonces $P_1 \parallel P_2$.

A) FVF B) VFF C) VVV

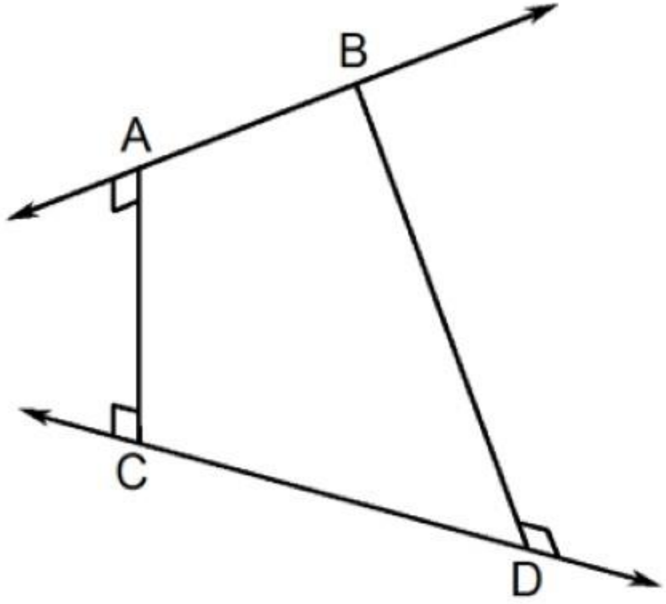
D) FFV E) FFF

Resolución:

Rpta. E

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

06. En la figura, $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son dos rectas cruzadas, $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{CA} \perp \overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{CD}$. Si AC=2 u, AB=4 u y $BD = 2\sqrt{3}\,u$ entonces la medida del ángulo determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ es:



A) 30 B) 45 C) 60
D) 75 E) 90

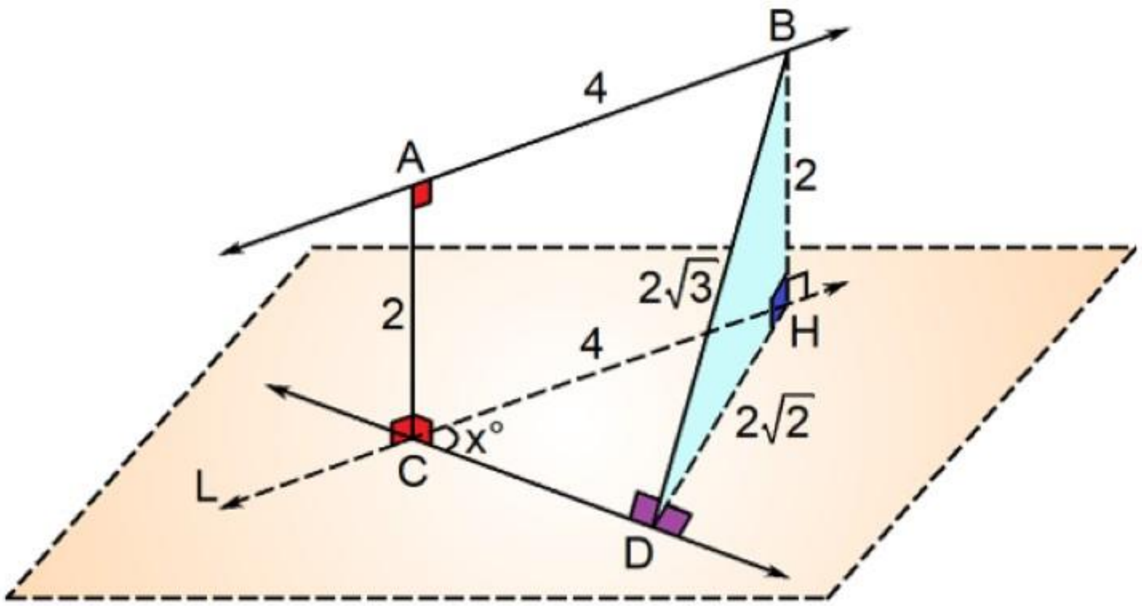
Resolución:

Trazamos por el punto C la recta L paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, entonces:

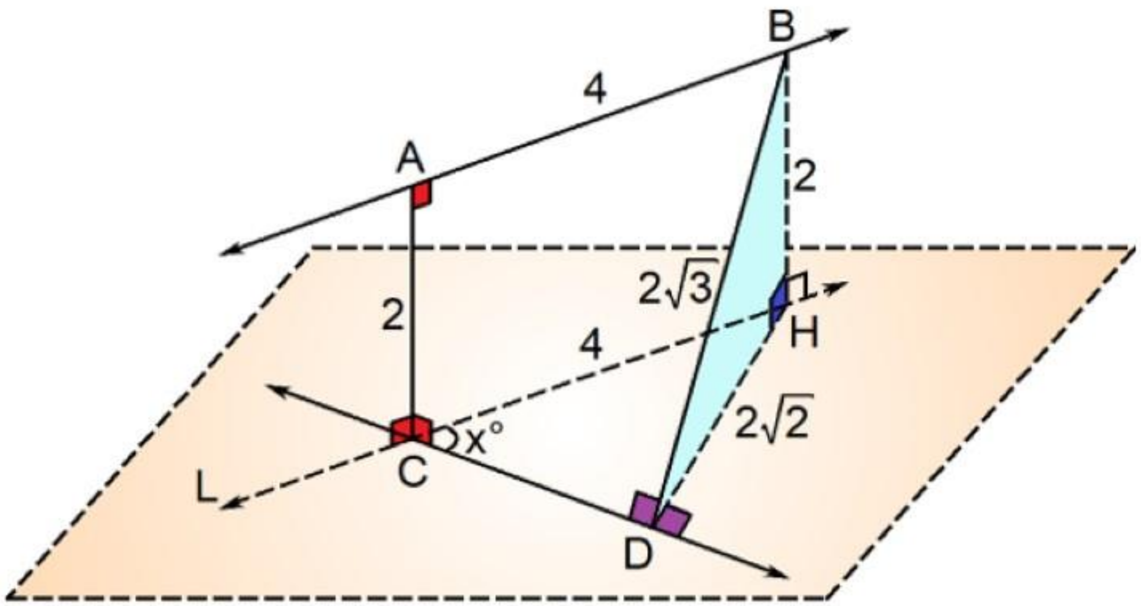
$$m\angle(\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}) = m\angle(\overleftrightarrow{L}, \overleftrightarrow{CD}) = x$$

Sea H la proyección de B sobre el plano determinado por $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, entonces por el teorema de las tres perpendiculares:

$$\overleftrightarrow{HD} \perp \overleftrightarrow{CD}$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



En la figura se observa:

$$AC = BH = 2 \text{ y } AB = CH = 4$$

En ΔDBH, por Pitágoras:

$$DH^2 + 2^2 = (2\sqrt{3})^2$$

$$\rightarrow DH = 2\sqrt{2}$$

Finalmente el ΔCDH es notable: $CH = DH\sqrt{2}$

$$\therefore x = 45$$

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

07. Por el vértice B de un cuadrado ABCD se traza la perpendicular $\overline{\mathrm{BH}}$ al plano que lo contiene, el punto E pertenece al lado $\overline{\mathrm{AB}}$, tal que los ángulos EHB y BHD son complementarios. Si $\mathrm{BH} = \ell$, entonces el área de la región EBD es:

A) ℓ^2 B) $\frac{\ell^2}{2}$ C) $\ell^2\sqrt{2}$

D) $\frac{\ell^2\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\ell^2\sqrt{2}}{4}$

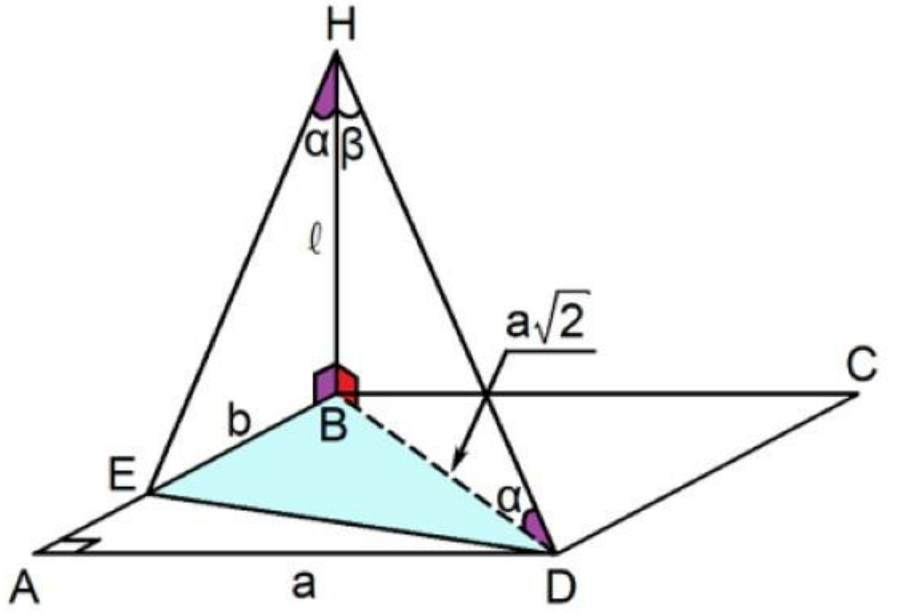
Resolución:

Por dato: $\alpha + \beta = 90$

En el triángulo rectángulo HBD: $\mathrm{m}\angle\mathrm{HDB} = \alpha$

Se pide: $\mathrm{S_{EBD}}$

$$\mathrm{S_{EBD}} = \frac{\mathrm{b.a}}{2}$$



Se observa: $\tan\alpha = \frac{\ell}{\mathrm{a}\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{b}}{\ell} \rightarrow \mathrm{a.b} = \frac{\ell^2}{\sqrt{2}}$

Finalmente: $\mathrm{S_{EBD}} = \frac{\mathrm{b.a}}{2} = \frac{1}{2}.\frac{\ell^2}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \mathrm{S_{EBD}} = \frac{\ell^2\sqrt{2}}{4}$$

Rpta. E

08. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. Todos los planos paralelos a una recta son paralelos entre sí.

II. Si las medidas de los ángulos entre una recta y dos planos son congruentes, entonces dichos planos son paralelos.

III. Por un punto del plano se puede trazar solo una recta perpendicular al plano.

A) VVV B) VVF C) VFV

D) FFV E) FFF

Resolución:

Rpta. D

09. En un hexágono regular ABCDEF, $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{Q\}$, $\overline{QP}$ es perpendicular al plano que contiene al hexágono. Si m∠PAQ=45, halle la razón de las áreas de las regiones triangulares ABP y EDP.

A) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{\sqrt{10}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

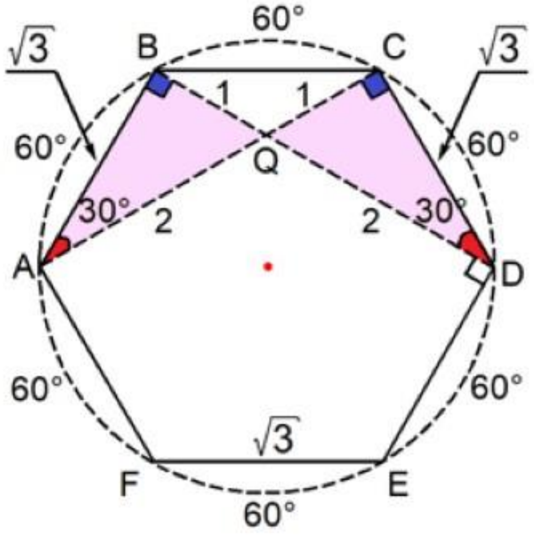
Resolución:

En el hexágono regular:

m∠BAC=m∠BDC=30

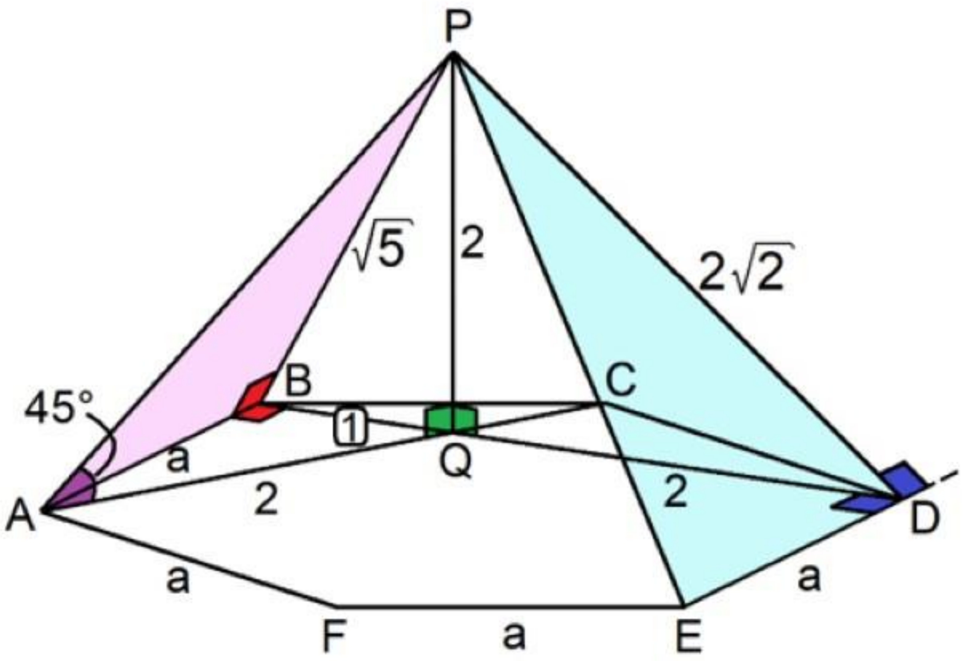
m∠ABD=m∠ACD=90

y m∠BDE=90



Por teorema de las tres perpendiculares:

m∠ABP=m∠PDE=90



Se pide: $x = \frac{S_{ABP}}{S_{EDP}} = \frac{\frac{a.\sqrt{5}}{2}}{\frac{a.2\sqrt{2}}{2}}$ $\therefore x = \frac{\sqrt{10}}{4}$

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

10. Una hoja de papel tiene forma circular de centro O, se hace un doblez en la hoja determinando una cuerda que mide 6u y tal que la flecha correspondiente a dicha cuerda es perpendicular al plano que contiene a la cuerda y a O. Si el radio del círculo mide 5u, halle la distancia de un extremo de la flecha, en su posición final a una cuerda congruente y paralela a la primera cuerda.

A) $\sqrt{61}$ B) $\sqrt{65}$ C) $\sqrt{63}$

D) $\sqrt{67}$ E) $\sqrt{69}$

Resolución:

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

11. En un cuadrado ABCD, M es punto medio de $\overline{CD}$ y $\overline{TM}$ es perpendicular al plano que contiene a dicho cuadrado. Si m∠BTD=90, halle la medida del ángulo entre $\overline{AC}$ y $\overline{TD}$.

A) 30 B) 32 C) 45

D) 37 E) 60

Resolución:

Rpta. E

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

12. Se tiene dos rectas $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ que se cruzan ortogonalmente; A y B pertenecen a $\overleftrightarrow{L_1}$; C y D pertenecen a $\overleftrightarrow{L_2}$. Si $\overline{AC}$ es la distancia entre las rectas y $BD = \ell$, calcule: $AB^2+CD^2+AD^2+BC^2$.

A) $2\ell^2$ B) $3\ell^2$ C) $4\ell^2$
D) $5\ell^2$ E) $6\ell^2$

Resolución:

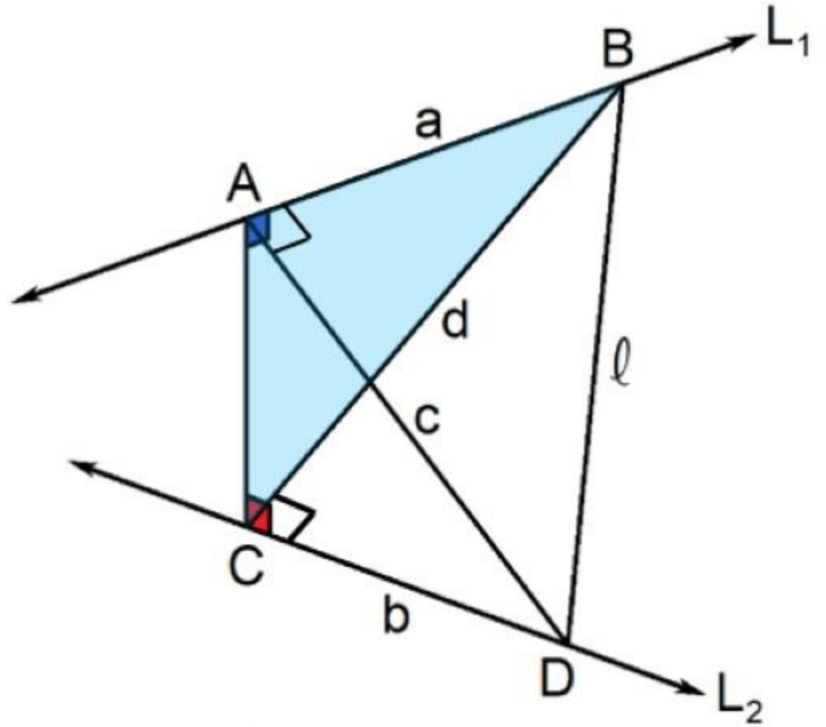
Se pide: $x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Por dato:

$$\left.\begin{matrix}\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2} \\ \overline{AC} \perp \overleftrightarrow{L_2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{L_2} \perp \Delta CAB \rightarrow \overleftrightarrow{L_2} \perp \overline{CB}$$

Además, por el teorema de las 3 perpendiculares:

$$\overline{DA} \perp \overleftrightarrow{L_1}$$



En ΔDCB: $b^2 + d^2 = \ell^2$

En ΔDAB: $c^2 + a^2 = \ell^2$

Finalmente: $x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

$\therefore x = 2\ell^2$ Rpta. A

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

13. Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ pertenecen a dos rectas cruzadas ortogonales. Si AB=a y CD=b, entonces la longitud del segmento que tiene por extremos los puntos medios de $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ es:

A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ C) $\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2}$

D) $\sqrt{ab}$ E) $\frac{1}{4}\sqrt{a^2+b^2}$

Resolución:

Rpta. B

14. Dos rectas L_1 y L_2 son cruzadas, $\overline{AB}$ es la perpendicular común a L_1 y L_2 ($A \in L_1$ y $B \in L_2$), en L_1 se ubica el punto C tal que dista de B y L_2 26 u y $2\sqrt{61}\,u$ respectivamente. Si AB=10 u, entonces la medida del ángulo entre las rectas L_1 y L_2 es:

A) 15 B) 30 C) 45
D) 60 E) 90

Resolución:

Rpta. B

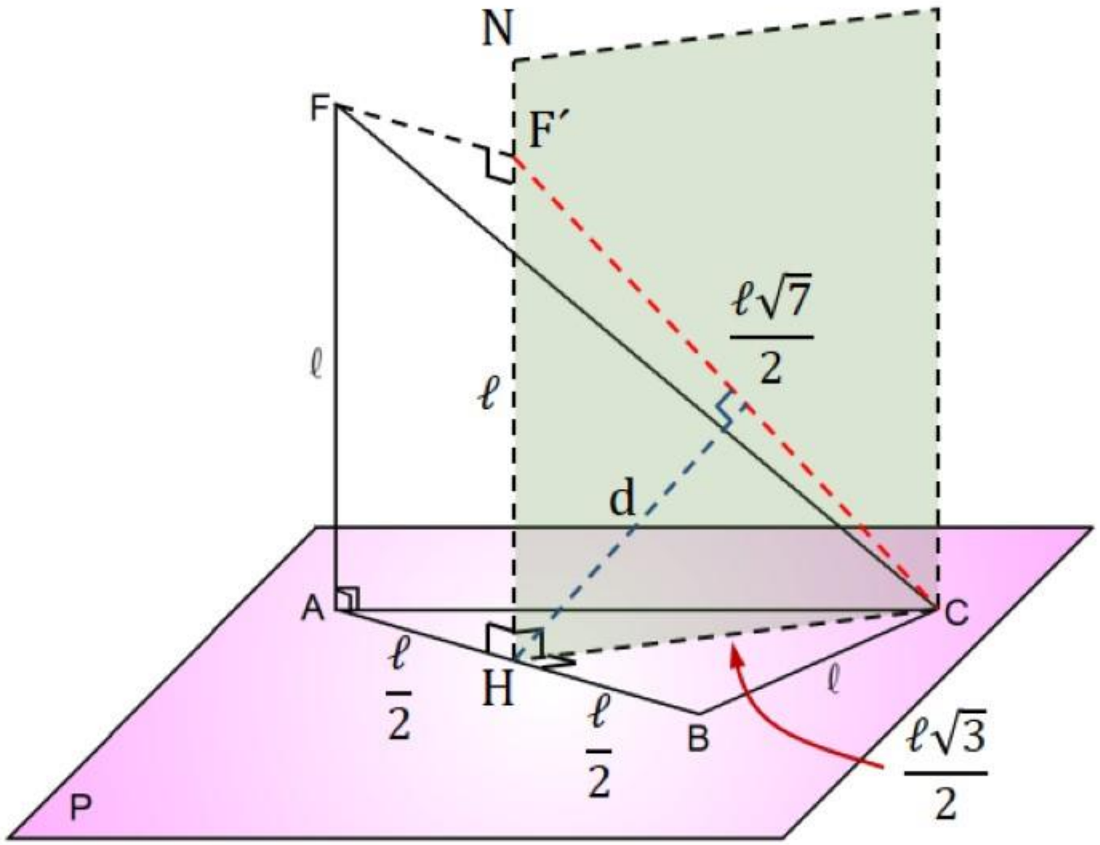
15. Un triángulo equilátero ABC de longitud de lado ℓ está contenido en un plano P, por el vértice A se traza $\overline{AF}$ perpendicular al plano P. Si $AF = \ell$, entonces la distancia entre las rectas cruzadas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{FC}$ es:

A) $\frac{\ell\sqrt{21}}{8}$ B) $\frac{\ell\sqrt{21}}{7}$ C) $\frac{\ell\sqrt{21}}{5}$

D) $\frac{\ell\sqrt{21}}{6}$ E) $\frac{\ell\sqrt{21}}{10}$

Resolución:

Se traza $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ y $\overline{NH} \perp \Delta ABC$, luego el plano del triángulo NHC es perpendicular a $\overline{AB}$. Trazamos $\overline{FF'}$ perpendicular a dicho plano, entonces H y $\overline{CF'}$ serán las proyecciones de las rectas dadas sobre dicho plano. Se pide la distancia de H a $\overline{CF'}$ (d).



En $\Delta F'HC$, por RM: $\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell\sqrt{7}}{2} \cdot d$

$$\therefore d = \frac{\ell\sqrt{21}}{7}$$

Rpta. B

16. En un plano H, se traza el triángulo equilátero ABC, por el vértice A se traza $\overline{AP}$ perpendicular al plano H. Si $AP = AB = \ell$, entonces la medida del ángulo que determinan las rectas que contienen a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{PC}$ es:

A) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ B) $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ C) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

D) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ E) $\frac{\pi}{4}$

Resolución:

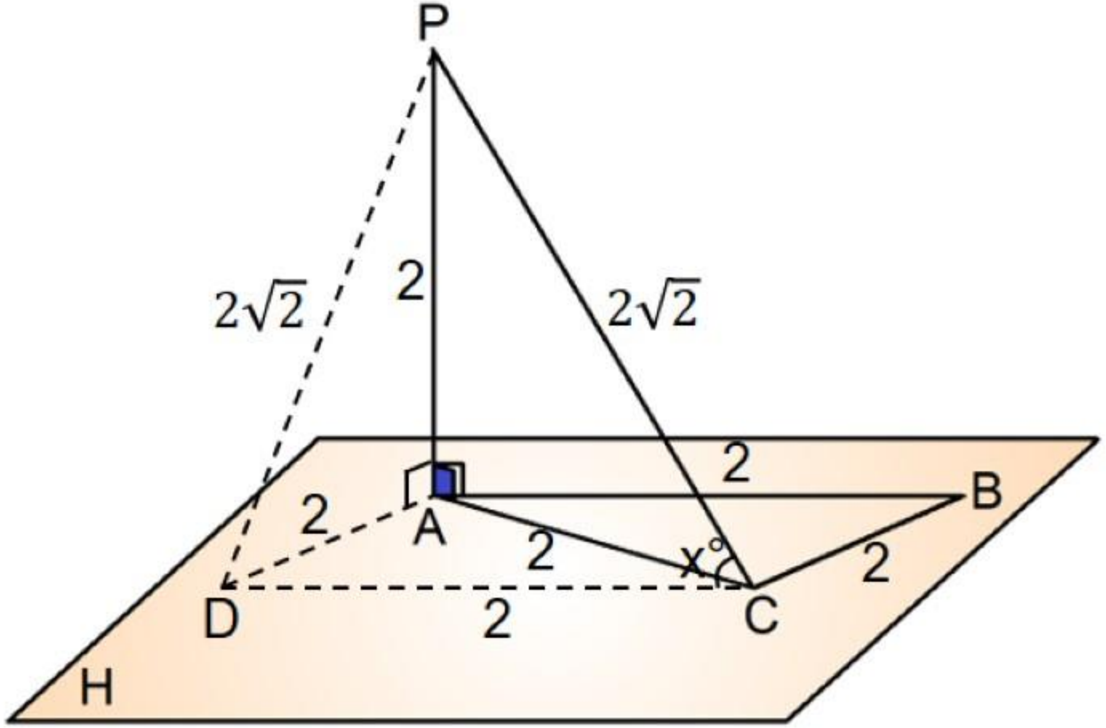
Se pide: $m\angle(\overline{AB}, \overline{PC})=x$

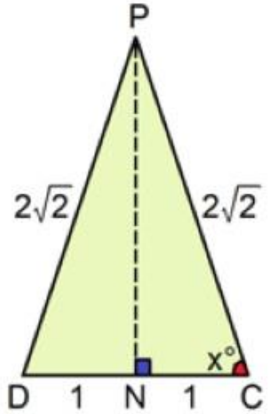
Construimos el paralelogramo ABCD, luego:

$$m\angle(\overline{AB}, \overline{PC})=m\angle(\overline{DC}, \overline{PC})=x$$

Sea AB=2, entonces:

$$BC = AC = CD = DA = 2 = AP$$
$$y\ PC = 2\sqrt{2} = PD$$





En el triángulo DPC:

$$\cos x° = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore x = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \qquad \text{Rpta. A}$$

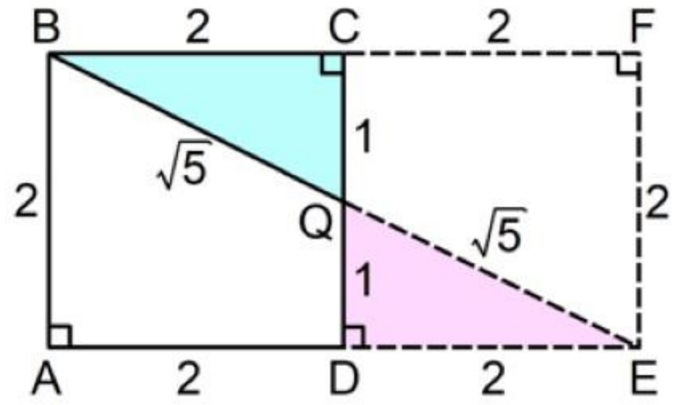
17. Por el vértice B de un cuadrado ABCD se traza $\overline{BP}$ perpendicular al plano que contiene al cuadrado, tal que BP=AB. Si $Q \in \overline{DC}$, tal que DQ=QC, entonces la medida del ángulo que determinan las rectas $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{BQ}$ es:

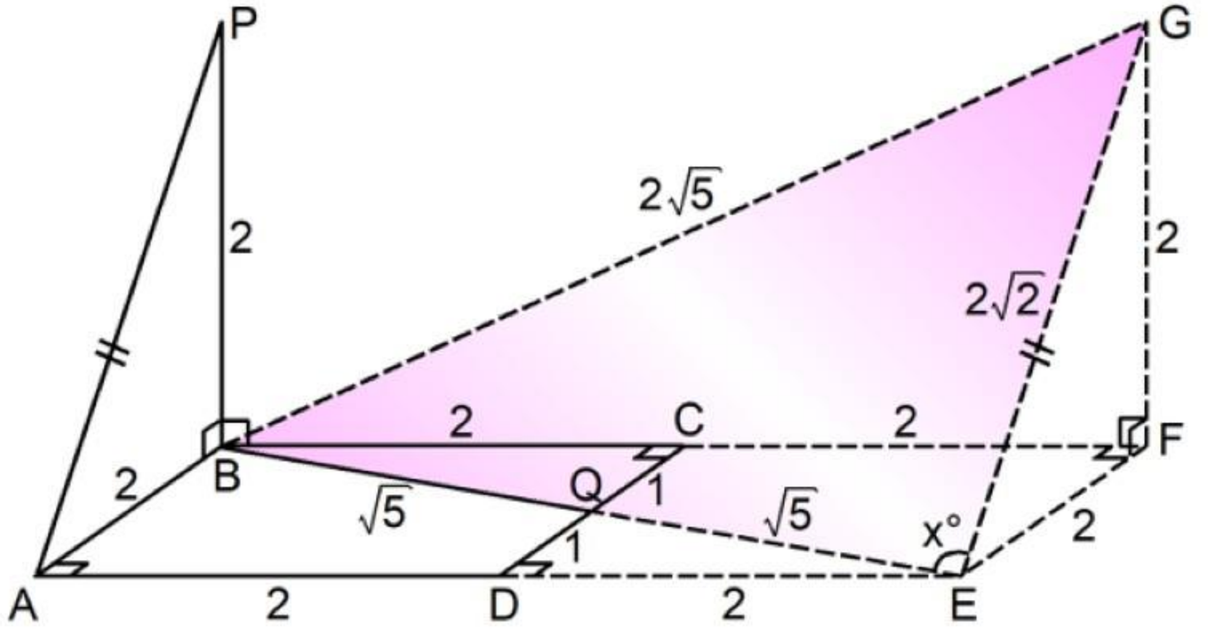
A) $\arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$ B) $\arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$ C) $\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)$

D) $\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ E) $\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

Resolución:

En la base:





En ΔEFG: $EG = 2\sqrt{2}$

En ΔBFG: $BG = 2\sqrt{5}$

Se observa que $\overline{EG} \parallel \overline{AP}$, luego:

$$m\angle(\overline{AP}, \overline{BQ}) = m\angle BEG = x$$

Por último, en ΔEBG: $\cos x° = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$ Rpta. A

18. En una circunferencia C, se ubican los puntos A, B y P, tal que, $\overline{\mathrm{AB}}$ es diámetro, se traza $\overline{\mathrm{BQ}}$ perpendicular al plano que contiene a C. Si $\mathrm{PB} = 2\sqrt{7}\,\mathrm{u}$, $\mathrm{QB} = 6\sqrt{2}\,\mathrm{u}$ y los triángulos APB y QBP son congruentes, entonces la medida del ángulo determinado por las rectas que contienen a $\overline{\mathrm{AB}}$ y $\overline{\mathrm{PQ}}$ es:

A) 30 B) 45 C) 60

D) 74 E) 75

Resolución:

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

19. En un plano H se tiene el triángulo equilátero ABC cuyo lado mide $4\sqrt{21}$. Por A se traza $\overline{AQ}$ perpendicular al plano H, tal que AQ=AB. Calcular la distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{QC}$.

A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 20

Resolución:

Idéntica a la pregunta 15.

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

20. Los planos P_1, P_2 y P_3 son paralelos (P_2 está entre P_1 y P_3), L_1 es una recta secante a P_1, P_2 y P_3 en los puntos A, B y C respectivamente y L_2 es una recta secante a P_1, P_2 y P_3 en los puntos D, E y F respectivamente. Si AB=6 u, EF=2 u y DE=8(BC), entonces la longitud (en u) de $\overline{DE}$ es:

A) $2\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{6}$ C) $4\sqrt{6}$
D) $6\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{3}$

Resolución:

Sugerencia: Utilice el teorema de Thales.

Rpta. C

FIN

MUCHAS GRACIAS